АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПО ГРАДИЕНТУ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ЗАДАЧЕ АЛЕКСИДЗЕ

ДУБОВЕНКО Ю.И., **(Институт геофизики НАН Украины)**

Ограничение математического моделирования в геофизике. Адепты функционально-аналитического направления геофизики разрабатывают методы и алгоритмы в рамках известных интегро-дифференциальных уравнений математической физики, описывающих поведение геофизических полей. Их усилия направлены на определение некоторых коэффициентов этих уравнений и внесение соответствующих поправок за “сложность” среды. Эти коэффициенты определяются по помощи итерационных схем, уложенных в принципы Тихонова решения обратных задач математической физики [1].

Но определение этих коэффициентов по функциям, образующим соответствующие системы уравнений – принципиально неоднозначно. Это явно очевидно в массовых машинных расчетах на системах большой размерности [2]. А при наименьших погрешностях во входных данных решения еще и существенно неустойчивы. Одолеть эту неустойчивость на порядок сложнее, чем получить формальные решения задач. Вдобавок, *след входных функций*, по которым определяют их коэффициенты – *двумерен*, а восстановить нужно *трехмерное* поле, по значениям которого найти коэффициенты при третьей координате, не совпадающей с размерностью следа.

Формальное решение этой проблемы дает псевдопространственное распределение, “растворяющееся” среди эквивалентных решений задачи. К тому же, заимствуя аппарат математической физики, геофизики одновременно унаследовали с ним сугубо *евклидовую структуру пространств* функций, которая для региональных построений недостаточна [3]. Но ограниченность интегро-дифференциальных операторов, аппроксимирующих математическую модель среды – лишь методическая сторона проблемы.

Входные данные – это, в общем, двумерные проекции геофизических полей на поверхность Земли, измеренные с погрешностями на разреженной нерегулярной сети наблюдений. Они априори получены с *неизвестными погрешностями*, поэтому в дополнение к сказанным выше методическим проблемам усложняют поведение (и определение) функций, входящих в соответствующие модельные уравнения. А развитие компьютерного моделирования привело к применению дискретной шкалы входных функций. Учитывая, что до сих пор не освоено прямое получение входных данных для обратных задач геофизики из баз данных пунктов наблюдений [4], перевод непрерывных входных данных в дискретную форму в цифровой картографии неизбежно вносит дополнительные искажения, кроме погрешностей измерений. Эти проблемы являются следствием *методологии* получения данных прошлого столетия, которая отживает свое. Мы их называем методологическими.

Новый геофизико-математический аппарат. Указанные выше, и другие математические и методические проблемы, обусловленные неадекватностью аппарата математического моделирования геофизических данных, заставляют геофизиков разрабатывать собственный геофизико-математический аппарат. В его рамках существенно переработаны известные математические методы с учетом фактов, присущих сугубо геофизическим явлениям. Начал разработку своеобразного “геофизического диалекта” В.Н. Страхов [5] в потенциальных полях, учтя ортогональность сигнала и погрешности и дискретность данных; продолжил В.В. Гольдин в сейсмике, В.В. Аксенов в электродинамике и др.

Вне четкой национальной программы развития технологий потенциальных полей и создания сети мониторинга этих полей нельзя влиять на реформу принципов получения исходных данных. Возможно, адекватная нуждам геофизиков-полевиков, и интерпретаторов система непрерывных наблюдений для формирования общедоступной базы данных гравимагнитных полей будет в ближайшей перспективе. Но можно предложить некоторые соображения по новым представлениям математических моделей геологической среды и геофизических полей в рамки апроксимационного подхода [6] к созданию подобных конструкций.

Новая постановка обратной задачи гравиметрии. Устойчивые способы восстановления потенциала силы тяжести крайне важны и для детальной гравиметрии и для глобального восстановления фигуры Земли. В последнее время ради повышения устойчивости и надежности решений в практических приложениях задач теории потенциала применяют новую величину – градиент потенциала силы тяжести. Теоретически она была определена еще в работе [7]. Современные приложения градиента потенциала силы тяжести ориентированы на применение в сочетании с классическим представлением аномалии силы тяжести как вертикальной производной потенциала.

В то же время значительно более высокую устойчивость и более широкий круг применений (хотя и более сложное двухступенчатое вычисление) имеет аналитическое продолжение упомянутого градиента для специально полученной в [3] новой аналитической (дифференциальной) модели поля силы тяжести. В ней учтена векторная природа силы тяжести, градиент ее изменения в зависимости от уровня кривизны поверхности измерений. Также определены погрешности, возникающие при замене прямого оператора известного в аналитическом продолжении уравнения Пуассона на уравнение силы тяжести: они пропорциональны геометрическим параметрам области исследований.

Вкратце основные этапы ее вывода иллюстрирует следующая цепочка уравнений:

$$\operatorname{divgrad}(\bar{g},\bar{n}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{n}}\left[\Delta W(x)\right] + a^2(x)\cdot g(x),$$

где $g(x)=\operatorname{grad}W(x)$, $\bar{n}(x)=\dfrac{\operatorname{grad}W(x)}{\left|\operatorname{grad}W(x)\right|}$, $\Delta W(x) = -4\pi f\mu(x) + 2\omega^2$, $\mu(x)\in C^{(1)}(G)$ и $a^2(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\cos(\bar{n},x_j)\right)^2$ – мера кривизны поверхности измерений. Отсюда после ряда преобразований получаем основное дифференциальное уравнение силы тяжести

$$L[g(x)] = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2} - a^2(x)g(x) = \begin{cases} -4\pi f\left|\operatorname{grad}\mu(x)\right|, & x\in G \\ 0, & x\in V \end{cases}. \qquad (1)$$

В рамках решения однородной части этого уравнения возникла так называемая нелинейная граничная задача Алексидзе для уравнения Лапласа [8], содержащая в граничных условиях значения модуля градиента потенциала силы тяжести. Ее решение полностью теоретически обосновано для гравитирующих объектов, ограниченных поверхностями Ляпунова. Определенные трудности ее решения известными численными методами обнажены в сообщении [9].

В общем, для определения модуля градиента силы тяжести $g(x)=|\mathrm{grad}W(x)|$ на поверхности ∂G Земли получено уравнение

$$g^2(x)=\frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\partial G\partial G}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\xi dS_\eta \tag{2}$$

а поверхностная плотность $\sigma(\xi),\ \xi\in\partial G$, входящая в выражение (2), определяется из нелинейного уравнения:

$$g^2(x)=\frac{\sigma^2(x)}{16}+\frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\partial G\partial G}\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi\,, \tag{3}$$

где направляющие косинусы компонент градиента $\cos(p,q)=\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_i-\xi_i)}{|x-\xi|}\cdot\frac{(x_i-\eta_i)}{|x-\eta|}$.

Методика решения задачи. Для получения решения уравнения (3) в [3] получены две итерационные схемы, к сожалению, малопригодные для практических вычислений большой размерности. Считаем, это происходит в силу слабой сходимости соответствующего интеграла (в смысле главного значения). А его регуляризация через изображение отрезком ряда не гарантирует желаемой точности решения.

Один из возможных способов решения уравнения (3) может быть таким. Представим его искомое решение $\sigma(\xi),\ \xi\in\partial G$ в виде линейной комбинации $\sigma(x)=\sum\sum a_{ij}\varphi_{ij}(x)$. Тогда его квадрат $\sigma^2(x)=\sum a_{ij}a_{kl}\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)$. Теперь формализуем выражение (3) через введенное обозначение:

$$\frac{\sigma^2(x)}{16}+\frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\partial G\partial G}\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi=\frac{1}{16}\left\{\sum_{i,j}\sum_{k,l}a_{ij}a_{kl}\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j}\sum_{k,l}a_{ij}a_{kl}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\partial G}\varphi_{ij}(\xi)\varphi_{kl}(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\xi|^2}dS_\xi dS_\eta\right.\equiv f(a_{ij}a_{kl}). \tag{4}$$

В таком изображении задача в итоге сводится к *классической* апроксимационной постановке: определить коэффициенты a_{ij} уравнения (4) так, чтобы выполнялось условие минимизации невязки функционала

$$\left\|g^2(x)-f(a_{ij}a_{kl})\right\|=\min_x \tag{5}$$

Отныне, смотря какую из популярных в теории обратных задач метрических норм мы изберем, задача нахождения аналитической аппроксимации (4)-(5) решается в том или ином пространстве с помощью классических вариационных методов, в частности, модификаций метода Ньютона. Решение получается в несколько раз быстрее (зависит от архитектуры компьютера), а преимущества в точности станут ясны только после испытаний на полевых данных.

1. *Лаврентьев М.М. и др*. Применение регуляризации в гравимагниторазведке при поисках месторождений углеводородов. – Москва, 2010.
2. *Страхов В.Н.* Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. – 2007. – **29**, № 1.
3. *Дубовенко Ю.И.* Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций \\ Геофиз. журн. – 2011. – **33**, № 1.
4. *Якимчик А. И.* Технология оцифровки карт фактического материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDRAW // Геофиз. журн. – 2010. – **32**, № 3.
5. *Страхов В.Н.* Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. – Москва, 2001.
6. *Страхов В.Н.* Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика. – Москва, 1999.
7. *Алексидзе М.А*. Редукция силы тяжести. – Тбилиси, 1965.
8. *Дубовенко Ю.И.* О приложениях модуля градиента потенциала силы тяжести в задаче Алексидзе \\ Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей: 6-е науч. чтения Ю.П. Булашевича, Екатеринбург, 12-17 сент. 2011 г. – Екатеринбург, 2011.
9. *Дубовенко Ю.И.* О трансформациях гравиполя с помощью задачи Алексидзе \\ XI Уральская мол. науч. школа по геофизике, 15-19 марта 2010 г., Екатеринбург. – Екатеринбург, 2010.

Математические постановки конкретных геофизических задач сводятся в итоге к определению значений коэффициентов уравнений математической физики, входящих в эти постановки. В русле этого факта решение задачи Алексидзе в виде нелинейного интегрального уравнения сведено к линейной комбинации искомых решений. Такая альтернативная задача сведена к классической задаче вариационного исчисления.

Dubovenko Yu.I., **AN ALTERNATIVE DENSITY DEFINITION BY THE GRAVITY FIELD GRADIENT IN THE ALEXIDZE PROBLEM**

Mathematical statements of the specific geophysical problems are reduced in in the upshot to the definition of the coefficients values of the mathematical physics equations being part of the statements. In channel of that fact the sulution of the Alexidze problem in the form of non-linear integral equation is reduced to the linear combination of the solutions required. Suchlike alternative problem is brought to the classic problem of variational calculus.